Exercice 1

Dérivation et encadrement

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x \quad 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

Montrer que *f* est continue en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction *g* définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\text{—}\right.$.

Calculer *g*(0) et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$: $\ln(1+x)\leq\left(\quad -\dfrac{x^2}{2}+\text{—}\right.$.

b. Par une étude analogue, montrer que si $x\geq 0$, alors $\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$.

c. Établir que pour tout *x* strictement positif on a : $-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{\ln(1+x)\qquad}{x^2}\leq-\dfrac{\ }{2}+\dfrac{x}{3}$.

En déduire que *f* est dérivable en zéro et que $f\,'(0)=-\dfrac{1}{2}$

3. a. Soit *h* la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$.

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de *h* sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que sur $[0,+\infty[$, $f\,'(x)=\dfrac{h(x}{x^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de *f* en précisant la limite de *f* en $+\infty$

Correction

1 . $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x \quad 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$; *f* est continue en 0 ssi

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, or le cours donne justement la limite

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2. a. $g\,'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\left(1-x+x^2\right)$
$=\dfrac{1-\quad-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x}=\dfrac{-x^3}{\quad}\leq 0$.

Donc *g* est décroissante et comme *g*(0)=0, on a

également $g(x)\leq 0$, soit $\ln(1+x)\leq\left(\quad-\dfrac{x^2}{2}+\text{—}\right.$.

b. On prend

$k(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{\quad}\Rightarrow k\,'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x$ et

$=\dfrac{1-\quad-x+x+x^2}{1+x}=\dfrac{x}{\quad}\geq 0$

$k(0)=0$ donc $k(x)\geq 0$, soit $\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$.

$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$

c. $\Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)-\quad\geq-\dfrac{x^2}{2}$.

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{\ln(1+x)\quad x}{x^2}\leq-\dfrac{1}{2}$

f dérivable en zéro : on calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-}{x^2}$$; or

le résultat précédent montre que cette limite est

précisément $-\frac{1}{2}$ qui est donc $f'(0)$.

3. a. $h(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)$,

$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{1- \quad -1}{(x+1)^2}=\frac{-x}{(x+1)^2}\le 0$; on a

$h(0)=0$ et h décroissante donc $h(x)\le 0$.

b. $f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1 \quad)}{x^2}=\frac{h(x}{}\le 0$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\approx\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{}=0$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x)=x\ln\left(1 \quad \frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x>0 \text{ et } f(0)=0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction f .

<u>Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire</u>

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty\,[$ par : $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right.\quad -\frac{}{\ ^2+1}$.

1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty\,[$, $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.

2. Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x. Déterminer la limite de g en $+\infty$ .Déterminer la limite de g en 0.

3. Dresser le tableau des variations de g.

4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $0{,}5<\alpha<0{,}6$. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty\,[$.

On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.

<u>Partie B : Etude de la fonction *f*</u>

1. a. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$ (on pourra poser $X=\frac{1}{x^2}$).

b. En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty\,[$, on a $f'(x)=g(x)$. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty\,[$.

2. Etude de f en 0

a. Montrer que $x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right.$ tend vers 0 quand X tend vers 0 par valeurs suprieures. Que peut-on en conclure ?

b. Etudier la dérivabilité de f en 0.

c. Préciser la tangente à la courbe de f au point O.

3. Donner l’équation de la tangente au point d’abscisse 1.

4. Donner l’allure de (C).

Correction

1. a. g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. En effet, $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de même que $-\frac{2}{x^2+1}$.

$$g'(x)=\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\frac{-2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}}+\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=-\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}+\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2\left(x^2+1\right)+4x^2}{\left(\ \ ^2\ \ 1\right)^2}$$

$$=\frac{2(x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

b. Le signe de g'(x) est celui de $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Comme g' est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : si $0<x<1$, $g'(x)$ est négatif ; si $x>1$, $g'(x)$ est positif.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ }{\ ^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ln 1=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

3. $\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to0}\frac{\ }{\ ^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{\to+\infty}\ln X=+\infty$ avec $X=1+\frac{1}{x^2}$

et $\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x^2+1}=2$ donc $\lim\limits_{x\to0} g(x)=+\infty$.

4. a.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-0,3$	↗	0

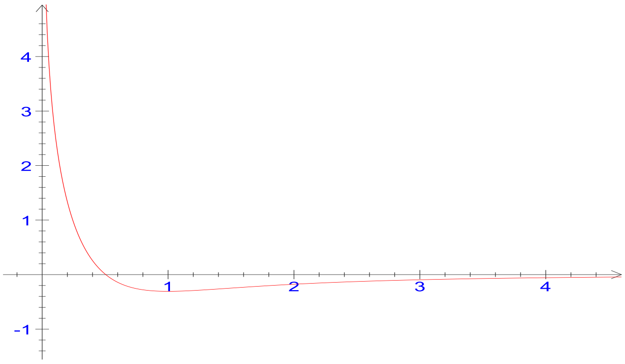
$g(1)=\ln(1+\frac{\ }{1^2})-\frac{2}{1^2+1}=\ln 2-1\approx-0,3$.

4. b. La fonction est continue et dérivable sur]0 ; 1], de plus elle est strictement décroissante sur cet intervalle en changeant de signe, donc il existe une valeur $\alpha>0$ telle que $g(\alpha)=0$.

On a $g(0,5)\approx 0,009438$ et $g(0,6)\approx-0,141452$ donc $g(0,5)>0=g(\alpha)>g(0,6)$ et comme g est décroissante, $0,5<\alpha<0,6$

5. Pour $0<x<\alpha$, alors $g(x)$ est positif ; pour $x>\alpha$ alors $g(x)$ est négatif.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x^2+1)=0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x^2+1)=\ln 1=0$.



1. a.

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$ (cours).

b. $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. $f(x) = x\ln(1\ \ \frac{1}{x^2})$

$$f'(x) = 1.\ln(1+\frac{1}{x^2}) + x.\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{\;{}_2}} = \ln(1+\frac{1}{x^2}) + x.\frac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x}}$$

$$= \ln(1+\frac{\ }{x^2}) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$$

X	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(\alpha)$	↘	0

3. a.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x\ln(x^2+1) - x\ln x^2\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x\ln x^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} +\frac{2\ln x^{-1}}{\frac{1}{x}}$$

avec $X = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{\to+\infty} \frac{2\ln X}{X} = 0^-$$

Conclusion : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(1\ \ \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

b. f dérivable en 0 si et seulement si la limite de son taux d'accroissement est finie.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

c. La tangente en O à f est verticale. Son équation est $x = 0$.

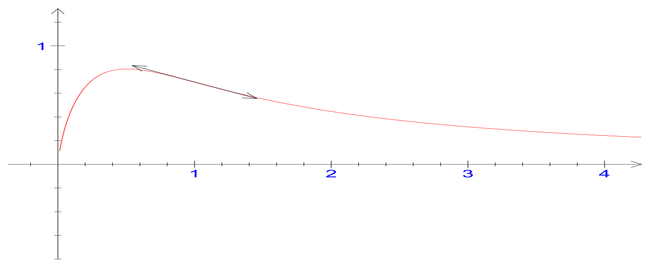
4. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$: $f(1) = 1\ln(1+\frac{1}{1^2}) = \ln 2$,

$f'(1) = g(1) = \ln 2 - 1$ d'où

$y = (\ln 2 - 1)(x-1) + \ln 2 \Leftrightarrow y = (\ln 2 - 1)x + 1$.

5.



Remarque :

On a vu dans la partie A que $g'(1) = 0$, or $g'(1) = f''(1)$, c'est-à-dire la dérivée seconde de f en 1 : la courbe admet un point d'inflexion pour $x = 1$

Exercice 3

Résolution (in)équations

1. Résoudre l'équation : $\ln(x^2 - 3x - 2) = \ln(2x - 6)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} \ln x - \ln \quad 1 \\ x + y \quad 2e \end{cases}$.

4. Résoudre l'inéquation : $\ln(1+x) - \ln(1-x) > \ln 2x - \ln(1+x)$.

5. Résoudre : $1 + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$.

6. Résoudre : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$.

CORRECTION

1.Domaine de définition :

$D_1 = \left]-\infty ; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\cup \left]\frac{3 \quad \sqrt{17}}{2} \quad +\infty\right[$, par ailleurs

$2x - 6 > 0$ si et seulement si $x > 3$. On a donc

$D_f \;=\; {}_1 \cap]3 ; +\infty[= \left]\frac{3+\sqrt{17}}{2} ; +\infty\right.$ car

$\frac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3{,}56$.

Pour la résolution : ln a = ln b équivaut à a = b donc,

l'équation devient : $x^2 - 3x - 2 = 2x - 6$ ou

encore $x^2 - 5x + 4 = 0$ d'où les solutions 1 et 4 ; mais

seule 4 est valable.

2.

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \frac{x}{y} = \ln e \\ x + y = 2e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = ye \\ ye + y \quad 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2e}{1+e} \\ x = \frac{2e^2}{1+e} \end{cases}$$

. Les deux solutions sont positives donc c'est bon.

3. Attention à l'ensemble de définition :

$1+x > 0, 1-x > 0, 2x > 0$

$\Rightarrow x > -1, x < 1, x > 0 \Rightarrow x \in]0 ; 1[$

On a alors

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} - \frac{2x}{1+x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2x+x^2-2x+2x^2}{(1 \quad x)(1+ \quad)} \quad 0$$.

$$\Leftrightarrow \frac{1+ \quad x^2}{(1-x)(1 \quad)} \quad 0$$

Le numérateur et le dénominateur sont positifs sur

]0 ; 1[, la solution est donc l'intervalle]0 ; 1[.

4 . $1 + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$: il faut que $x > -3$ et

que $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3) > 0$ (à l'extérieur des

racines) donc D =]– 3 ; +∞ [.

$1+\ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$

$\Leftrightarrow$ $\ln e + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$

$\Leftrightarrow$ $\ln e(x + 3) = \ln(x^2 + 2x-3)$

$\Leftrightarrow$ $e(x + 3) = x^2 + 2x - 3$.

ln est une bijection : $x^2 + (2 - e)x - 3(1 + e) = 0$,

$\Delta = (2 - e)^2 + 12(1 + e) = 4 - 4e + e^2 + 12 + 12e$
$= e^2 + 8e + 16 = (e + 4)^2$.

$x = \frac{-(2-e) \pm (e+4)}{2}$, $x_1 = -3 \notin$ D o'u $x_2 = e + 1 \in$D.

S = {e + 1}.

5. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$ Il faut que $x^2 - 4e^2 > 0$ et que $3x > 0$ i.e. $x > 0$ et $x^2 > 4e^2$ c'est-à-dire $(x > 0)$ et $(x > 2e$ ou $x < -2e)$.

$D =]2e\,;\,+\infty[$.

$\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln e + \ln(3x)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln(3ex)$

$\Leftrightarrow x^2 - 4e^2 < 3ex \Leftrightarrow$ (E) $x^2 - 3ex - 4e^2 < 0$.

$\Delta = 9e^2 + 16e^2 = 25e^2 = (5e)^2$, $x = \dfrac{3e \pm \ e}{2}$;

(E) $\Leftrightarrow -e < x < 4e$. $S =]2e\,;\,4e[$.

Vrai-Faux A) Soit f la fonction définie par $f\ (x \ = \frac{x}{2} \quad \frac{1}{\ln(\sqrt{x}\ )}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

a. On a D =]0, +∞[.

b. La courbe C admet une droite asymptote en +∞.

c. Pour tout $x \in$ D, on a : $f\ (x) < \frac{x}{2}$.

d. Pour tout $x \in$ D, on a : $f\ '(x) = \frac{1}{2} + \frac{\quad}{x\,(\ln\quad)^2}$.

QCM (choisir la bonne réponse)

Soient *f* et *g* les fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ respectivement définies par :

$$f\ (x) = -2\ln(x) + 2 + x^2 \quad \text{et} \quad g\ (x) = \frac{x^2 - 2\ln(\quad)}{x}.$$

1. La dérivée de *f* est définie par : $f\,'(x) =$

A. $\frac{2x^2 -}{x}$	B. $\frac{2x^2 +}{x}$	C. $\frac{-2x^2}{x}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction *f* au point d'abscisse 2 est :

A. $y = f\ '(x)(x-2) + f\ (2)$	B. $y = f\ '(x)(x-2) - f\ (2)$	C. $y = f\ '(2)(x-2) + f\ (2)$	D. $y = f\ (2)(x-2) + f\ '(2)$

3. La dérivée de *g* est définie par : $g'(x) =$

A. $-2x \quad \frac{2}{x}$	B. $\frac{f\ (\quad)}{x^2}$	C. $-\frac{f\ (\quad)}{x^2}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

4. Le minimum de *f* est égal à :

A. 1	B. 3	C. 0	D. aucune des 3 réponses précédentes

5. $f\left(\sqrt{e}\right) =$

A. *e*	B. *e*+1	C. *e*–1	D. aucune des 3 réponses précédentes

6. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

A. 0	B. 2	C. $-\infty$	D. $+\infty$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} g\ (x) =$

A. $-\infty$	B. $+\infty$	C. n'existe pas	D. aucune des 3 réponses précédentes

8. L'asymptote oblique à la courbe C_g représentative de *g* a pour équation réduite :

A. $y = -x - 2$	B. $y = -x$	C. $y = x + 2$	D. $y = x$

10. Le nombre de solutions à l'équation $g(x) = 0$ est égal à :

A. 0	B. 1	C. 2	D. 3